ИССЛЕДОВАНИЕ СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ GI – (M/∞)^K МЕТОДОМ НАЧАЛЬНЫХ МОМЕНТОВ

А. Н. Моисеев, А. А. Назаров

Томский государственный университет
Томск, Россия
E-mail: moiseev.tsu@gmail.com

В работе представлено исследование сети массового обслуживания с рекуррентным входящим потоком, неограниченным числом приборов и экспоненциальным обслуживанием в узлах. Получены выражения для начальных моментов первого и второго порядков числа заявок, находящихся на обслуживании в узлах сети в стационарном режиме функционирования.

Ключевые слова: сеть массового обслуживания, метод начальных моментов, системы с неограниченным числом приборов.

ВВЕДЕНИЕ

Сети массового обслуживания [1] являются одним из важнейших инструментов моделирования и анализа современных телекоммуникационных сетей, систем распределенной обработки информации, социально-экономических систем. В настоящей работе рассматривается сеть массового обслуживания с рекуррентным входящим потоком, неограниченным числом приборов и экспоненциальным обслуживанием в узлах. Для данной сети в работе получены выражения для вычисления начальных моментов первого и второго порядков числа заявок в узлах сети в стационарном режиме ее функционирования. Несомненно, данные характеристики являются значимыми как для анализа функционирования существующих, так и при проектировании новых сетей, так как позволяют оценить возможную нагрузку на узлы сети и принять меры по предотвращению ее перегрузки или потери передаваемых пакетов информации в сетях с конечным числом приборов.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим сеть массового обслуживания, состоящую из K узлов, каждый из которых содержит неограниченное число приборов. На вход сети поступает рекуррентный поток заявок, в котором длины интервалов между последовательным поступлением заявок имеют функцию распределения $A(x)$. Интенсивность такого потока λ определяется выражением

$$\lambda = \left\{ \int_0^\infty [1 - A(x)]dx \right\}^{-1}.$$

Заявка входящего потока поступает для обслуживания на один из узлов сети, номер которого определяется дискретным распределением вероятностей, заданным в виде вектор-строки $\mathbf{v} = (v_1, ..., v_K)$. Время обслуживания на каждом узле является экспоненциальной случайной величиной с параметром μ_k для k-го узла ($k = \overline{1, K}$). По окончании обслуживания в k-ом узле заявка с заданной вероятностью r_{kl} переходит в l-й узел сети для дальнейшего обслуживания ($l = \overline{1, K}$) либо покидает сеть с вероятностью r_{k0}. Очевидно, что $\sum_{l=1}^{K} r_{kl} + r_{k0} = 1$ для всех $k = \overline{1, K}$. Из вероятностей переходов r_{kl} ($k, l = \overline{1, K}$) сформируем матрицу маршрутизации, которую обозначим $\mathbf{R}$.

Обозначим через $i_k(t)$ количество заявок, находящихся на обслуживании в k-ом узле сети в момент времени t ($k = \overline{1, K}$). Ставится задача определения начальных моментов первого и второго порядков для многомерного случайного процесса изменения состояний сети $\mathbf{i}(t) = (i_1(t) \quad ... \quad i_K(t))^{\mathrm{T}}$ в стационарном режиме функционирования.

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ КОЛМОГОРОВА

Пусть $z(t)$ – длина интервала времени от момента t до момента поступления следующей заявки входящего потока. Тогда многомерный случайный процесс $\{\mathbf{i}(t), z(t)\}$ будет марковским. Для его распределения вероятностей $P(\mathbf{i}, z, t) = \mathrm{P}\{\mathbf{i}(t) = \mathbf{i},\, z(t) < z\}$ можно записать следующую систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\frac{\partial P(\mathbf{i}, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial P(\mathbf{i}, z, t)}{\partial z} - \frac{\partial P(\mathbf{i}, 0, t)}{\partial z} - \sum_{k=1}^{K} P(\mathbf{i}, z, t) \cdot i_k \mu_k + \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial P(\mathbf{i} - \mathbf{e}_k, 0, t)}{\partial z} A(z) v_k +$$
$$+ \sum_{k=1}^{K} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{K} P(\mathbf{i} + \mathbf{e}_k - \mathbf{e}_l, z, t) \cdot (i_k + 1) \mu_k r_{kl} + \sum_{k=1}^{K} P(\mathbf{i}, z, t) i_k \mu_k r_{kk} + \sum_{k=1}^{K} P(\mathbf{i} + \mathbf{e}_k, z, t) \cdot (i_k + 1) \mu_k r_{k0} \quad (1)$$

для всех неотрицательных значений $\mathbf{i}$ и z (предполагается, что $P(\mathbf{i}, z, t) = 0$, если хотя бы один элемент вектора $\mathbf{i}$ отрицателен). Здесь через $\mathbf{e}_k$ обозначен вектор-столбец, все элементы которого равны нулю кроме элемента под номером k, равного единице.

Введем частичную характеристическую функцию

$$H(\mathbf{u}, z, t) = \sum_{i_1=0}^{\infty} ... \sum_{i_K=0}^{\infty} e^{ju_1 i_1 + ... + ju_K i_K} P(\mathbf{i}, z, t)$$

векторного аргумента $\mathbf{u}$ (здесь $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица). Для нее система (1) перепишется в виде уравнения

$$\frac{\partial H(\mathbf{u}, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial H(\mathbf{u}, z, t)}{\partial z} - \frac{\partial H(\mathbf{u}, 0, t)}{\partial z} + j \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial H(\mathbf{u}, z, t)}{\partial u_k} \mu_k + \sum_{k=1}^{K} e^{ju_k} \frac{\partial H(\mathbf{u}, 0, t)}{\partial z} A(z) v_k -$$
$$- j \sum_{k=1}^{K} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{K} e^{-ju_k} e^{ju_l} \frac{\partial H(\mathbf{u}, z, t)}{\partial u_k} \mu_k r_{kl} - j \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial H(\mathbf{u}, z, t)}{\partial u_k} \mu_k r_{kk} - j \sum_{k=1}^{K} e^{-ju_k} \frac{\partial H(\mathbf{u}, z, t)}{\partial u_k} \mu_k r_{k0}.$$

Для стационарного режима функционирования сети это уравнение примет вид

$$\frac{\partial H(\mathbf{u}, z)}{\partial z} + \frac{\partial H(\mathbf{u}, 0)}{\partial z} \sum_{k}^{K} \left[e^{ju_k} A(z) - 1 \right] v_k +$$
$$+ j \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial H(\mathbf{u}, z)}{\partial u_k} \mu_k \left\{ 1 - e^{-ju_k} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{K} r_{kl} e^{ju_l} - r_{kk} - e^{-ju_k} r_{k0} \right\} = 0. \quad (2)$$

МОМЕНТЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Введем функции $a_k(z)$, определяемые выражениями

$$\left.\frac{\partial H(\mathbf{u},z)}{\partial u_k}\right|_{\mathbf{u}=\mathbf{0}} = j \cdot a_k(z) \tag{3}$$

для $k=\overline{1,K}$. Известно [2], что начальные моменты первого порядка $m_k^{(1)}$ определяются выражениями $m_k^{(1)} = a_k(\infty)$. Для их нахождения продифференцируем уравнение (2) по каждой из переменных u_n, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 H(\mathbf{u},z)}{\partial z\,\partial u_n} + \frac{\partial^2 H(\mathbf{u},0)}{\partial z\,\partial u_n}\sum_{k=1}^{K}\left[e^{ju_k}A(z)-1\right]v_k + j\frac{\partial H(\mathbf{u},0)}{\partial z}e^{ju_n}A(z)v_n + \\
+ j\sum_{k=1}^{K}\frac{\partial^2 H(\mathbf{u},z)}{\partial u_k\,\partial u_n}\mu_k\left\{1-e^{-ju_k}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{K} r_{kl}e^{ju_l} - r_{kk} - r_{k0}e^{-ju_k}\right\} + \\
+ j^2\frac{\partial H(\mathbf{u},z)}{\partial u_n}\mu_n e^{-ju_n}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq n}}^{K} r_{nl}e^{ju_l} - j^2\sum_{k=1}^{K}\frac{\partial H(\mathbf{u},z)}{\partial u_k}\mu_k e^{-ju_k}r_{kn}e^{ju_n}\left(1-\delta_{kn}\right) + \\
+ j^2\frac{\partial H(\mathbf{u},z)}{\partial u_n}\mu_n r_{n0}e^{-ju_n} = 0, \quad n=\overline{1,K},
\end{gathered} \tag{4}$$

где δ_{kn} – символ Кронекера.

Подставляя сюда $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ и учитывая, что [3]

$$\left.\frac{\partial H(u,z)}{\partial z}\right|_{\substack{\mathbf{u}=\mathbf{0}\\ z=0}} = \lambda,$$

с использованием выражений (3) получаем следующую систему дифференциальных уравнений относительно функций $a_k(z)$:

$$a_n'(z) + a_n'(0)\left[A(z)-1\right] + \lambda A(z)v_n - a_n(z)\mu_n + \sum_{k=1}^{K} a_k(z)\mu_k r_{kn} = 0, \quad n=\overline{1,K}.$$

Для этой системы применим преобразования Лапласа – Стилтьеса

$$A^*(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha z}dA(z), \quad a_k^*(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha z}da_k(z), \quad k=\overline{1,K},$$

получим:

$$a_n^*(\alpha)\left(\alpha-\mu_n\right) + \sum_{k=1}^{K} a_k^*(\alpha)\mu_k r_{kn} + a_n'(0)\left[A^*(\alpha)-1\right] + \lambda A^*(\alpha)v_n = 0, \quad n=\overline{1,K}. \tag{5}$$

Подставляя сюда $\alpha = 0$ и учитывая, что $A^*(0)=1$, $\varphi_k^*(0) = \varphi_k(\infty) = m_k^{(1)}$, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно первых моментов состояния рассматриваемой сети массового обслуживания:

$$-\mu_n m_n^{(1)} + \sum_{k=1}^{K} m_k^{(1)}\mu_k r_{kn} + \lambda v_n = 0, \quad n=\overline{1,K}.$$

С использованием матричных обозначений $\boldsymbol{\mu} = \mathrm{diag}\{\mu_1, ..., \mu_K\}$, $\mathbf{m}^{(1)} = \left(m_1^{(1)}, ..., m_K^{(1)}\right)$, эта система перепишется следующим образом:

$$-\mathbf{m}^{(1)}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{m}^{(1)}\boldsymbol{\mu}\mathbf{R} + \lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Ее решение имеет вид:

$$\mathbf{m}^{(1)} = \lambda\mathbf{v}\left[\boldsymbol{\mu}(\mathbf{I} - \mathbf{R})\right]^{-1}. \tag{6}$$

Таким образом, выражение (6) полностью определяет среднее число заявок в узлах рассматриваемой сети в стационарном режиме функционирования.

МОМЕНТЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Введем функции $b_{kl}(z)$, определяемые выражениями

$$\left.\frac{\partial^2 H(\mathbf{u}, z)}{\partial u_k\, \partial u_l}\right|_{\mathbf{u}=\mathbf{0}} = j^2 \cdot b_{kl}(z) \tag{7}$$

для $k, l = \overline{1, K}$. Известно [2], что начальные моменты второго порядка $m_{kl}^{(2)}$ состояния рассматриваемой сети определяются равенствами

$$m_{kl}^{(2)} = b_{kl}(\infty). \tag{8}$$

Для их нахождения сначала перейдем к пределу $z \to \infty$ в системе (4):

$$\frac{\partial^2 H(\mathbf{u},0)}{\partial z\, \partial u_n} \sum_{k=1}^{K} \left[e^{ju_k} - 1\right] v_k + j \frac{\partial H(\mathbf{u},0)}{\partial z} e^{ju_n} v_n +$$

$$+ j \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial^2 H(\mathbf{u},\infty)}{\partial u_k\, \partial u_n} \mu_k \left\{ 1 - e^{-ju_k} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{K} r_{kl} e^{ju_l} - r_{kk} - r_{k0} e^{-ju_k} \right\} +$$

$$+ j^2 \frac{\partial H(\mathbf{u},\infty)}{\partial u_n} \mu_n e^{-ju_n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^{K} r_{nl} e^{ju_l} - j^2 \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial H(\mathbf{u},\infty)}{\partial u_k} \mu_k e^{-ju_k} r_{kn} e^{ju_n} (1 - \delta_{kn}) +$$

$$+ j^2 \frac{\partial H(\mathbf{u},\infty)}{\partial u_n} \mu_n r_{n0} e^{-ju_n} = 0, \quad n = \overline{1, K},$$

а затем продифференцируем каждое уравнение этой системы по каждой из переменных u_s, $s = \overline{1, K}$. В результате получим систему из K^2 дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial^2 H(\mathbf{u},0)}{\partial u_n\, \partial u_s} \sum_{k=1}^{K} \left[e^{ju_k} - 1\right] v_k + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial H(\mathbf{u},0)}{\partial u_n} j e^{ju_s} v_s + j \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial H(\mathbf{u},0)}{\partial u_s} e^{ju_n} v_n + j \frac{\partial H(\mathbf{u},0)}{\partial z} j e^{ju_n} v_n \delta_{ns} +$$

$$+ j \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial^3 H(\mathbf{u},\infty)}{\partial u_k\, \partial u_n\, \partial u_s} \mu_k \left\{ 1 - e^{-ju_k} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{K} r_{kl} e^{ju_l} - r_{kk} - r_{k0} e^{-ju_k} \right\} + j^2 \frac{\partial^2 H(\mathbf{u},\infty)}{\partial u_s\, \partial u_n} \mu_s e^{-ju_s} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq s}}^{K} r_{sl} e^{ju_l} -$$

$$- j^2 \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial^2 H(\mathbf{u},\infty)}{\partial u_k\, \partial u_n} \mu_k e^{-ju_k} r_{ks} e^{ju_s} (1 - \delta_{ks}) + j^2 \frac{\partial^2 H(\mathbf{u},\infty)}{\partial u_s\, \partial u_n} \mu_s r_{s0} e^{-ju_s} +$$

$$+ j^2 \frac{\partial H(\mathbf{u},\infty)}{\partial u_n\, \partial u_s} \mu_n e^{-ju_n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^{K} r_{nl} e^{ju_l} - j^3 \delta_{ns} \frac{\partial H(\mathbf{u},\infty)}{\partial u_n} \mu_n e^{-ju_n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq n}}^{K} r_{nl} e^{ju_l} +$$

$$+ j^3(1-\delta_{ns})\frac{\partial H(\mathbf{u},\infty)}{\partial u_n}\mu_n e^{-ju_n} r_{ns} e^{ju_s} - j^2\sum_{k=1}^{K}\frac{\partial H(\mathbf{u},\infty)}{\partial u_k\,\partial u_s}\mu_k e^{-ju_k} r_{kn} e^{ju_n}(1-\delta_{kn}) +$$

$$+ j^3\frac{\partial H(\mathbf{u},\infty)}{\partial u_s}\mu_s e^{-ju_s} r_{sn} e^{ju_n}(1-\delta_{sn}) - j^3\sum_{k=1}^{K}\frac{\partial H(\mathbf{u},\infty)}{\partial u_k}\mu_k e^{-ju_k} r_{kn} e^{ju_n}(1-\delta_{kn})\delta_{sn} +$$

$$+ j^2\frac{\partial H(\mathbf{u},\infty)}{\partial u_n\,\partial u_s}\mu_n r_{n0} e^{-ju_n} - j^3\frac{\partial H(\mathbf{u},\infty)}{\partial u_n}\mu_n r_{n0} e^{-ju_n}\delta_{sn} = 0, \quad n,s=\overline{1,K}.$$

Выполним в этой системе подстановку $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, с учетом (7) – (8) получаем следующую систему уравнений относительно начальных моментов второго порядка:

$$a'_n(0)v_s + a'_s(0)v_n - m^{(2)}_{sn}\mu_s - m^{(2)}_{ns}\mu_n + \sum_{k=1}^{K} m^{(2)}_{kn}\mu_k r_{ks} + \sum_{k=1}^{K} m^{(2)}_{ks}\mu_k r_{kn} -$$

$$- m^{(1)}_n\mu_n r_{ns} - m^{(1)}_s\mu_s r_{sn} + \delta_{ns}\left\{\lambda v_n + m^{(1)}_n\mu_n + \sum_{k=1}^{K} m^{(1)}_k\mu_k r_{kn}\right\} = 0, \quad n,s=\overline{1,K}.$$

С использованием матричных обозначений эту систему можно записать в виде уравнения

$$\mathbf{m}^{(2)}\mathbf{B} + \mathbf{B}^T\mathbf{m}^{(2)} = \mathbf{C}, \tag{9}$$

где

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{I}-\mathbf{R}),$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{a}'(0)^T\mathbf{v} + \left(\mathbf{a}'(0)^T\mathbf{v}\right)^T - \mathrm{diag}\left\{\mathbf{m}^{(1)}\right\}\boldsymbol{\mu}\mathbf{R} - \left(\mathrm{diag}\left\{\mathbf{m}^{(1)}\right\}\boldsymbol{\mu}\mathbf{R}\right)^T + \mathrm{diag}\left\{\lambda\mathbf{v} + \mathbf{m}^{(1)}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{m}^{(1)}\boldsymbol{\mu}\mathbf{R}\right\},$$

$$\mathbf{a}'(0) = \left(a'_1(0),\ldots,a'_K(0)\right).$$

Константы $a'_k(0)$, $k=\overline{1,K}$, можно найти следующим образом. Запишем (5) в матричном виде:

$$\mathbf{a}^*(\alpha)(\alpha\mathbf{I}-\boldsymbol{\mu}) + \mathbf{a}^*(\alpha)\boldsymbol{\mu}\mathbf{R} + \mathbf{a}'(0)\left[A^*(\alpha)-1\right] + \lambda A^*(\alpha)\mathbf{v} = \mathbf{0},$$

где $\mathbf{a}^*(\alpha) = \left(a^*_1(\alpha),\ldots,a^*_K(\alpha)\right)$. Отсюда получаем следующее равенство:

$$\mathbf{a}^*(\alpha)\left[\alpha\mathbf{I}-\mathbf{B}\right] = \left[1-A^*(\alpha)\right]\mathbf{a}'(0) - \lambda A^*(\alpha)\mathbf{v}. \tag{10}$$

Пусть матрица $\mathbf{B}$ имеет только простые действительные собственные числа α_l, $l=\overline{1,K}$. Обозначим собственный вектор этой матрицы, соответствующий l-му собственному числу через $\mathbf{X}_l$. Так как

$$\left[\alpha_l\mathbf{I}-\mathbf{B}\right]\mathbf{X}_l = \mathbf{0},$$

то, домножая обе части (10) на каждый собственный вектор $\mathbf{X}_l$, получаем линейную систему из K уравнений

$$\left\{\left[1-A^*(\alpha_l)\right]\mathbf{a}'(0) - \lambda A^*(\alpha_l)\mathbf{v}\right\}\mathbf{X}_l = 0, \quad l=\overline{1,K}$$

относительно K неизвестных компонент вектора $\mathbf{a}'(0)$. Запишем эту систему в матричном виде. Для этого введем следующие обозначения: $\mathbf{X} = \left[\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\ldots,\mathbf{X}_K\right]$ – матрица, составленная из столбцов $\mathbf{X}_l$, $\mathbf{y}$ – вектор-строка, составленный из элементов вида $\dfrac{\lambda A^*(\alpha_l)}{1-A^*(\alpha_l)}\mathbf{v}\mathbf{X}_l$, $l=\overline{1,K}$. В итоге получаем матричное уравнение

$$\mathbf{a}'(0)\mathbf{X} = \mathbf{y}.$$

Так как для различных собственных чисел матрица **X** невырождена, решение полученной системы можно записать в виде

$$\mathbf{a}'(0) = \mathbf{y}\mathbf{X}^{-1}.$$

Таким образом, найдя различные собственные числа и соответствующие им собственные векторы матрицы $\mathbf{B} = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{I} - \mathbf{R})$, мы можем однозначно вычислить элементы вектора $\mathbf{a}'(0)$, подставить в (9) и найти значения вторых начальных моментов числа заявок в сети GI – (M/∞)^K. Вопрос о вычислении вектора $\mathbf{a}'(0)$ в случае, если матрица **B** имеет комплексные или кратные собственные числа, выходит за рамки данной публикации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены формулы для расчета первых и вторых начальных моментов числа заявок в сети массового обслуживания с рекуррентным входящим потоком, неограниченным числом приборов и экспоненциальным обслуживанием в узлах. Проведенное численное и имитационное моделирование подтверждает справедливость полученных результатов.

Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации № 1.511.2014/K.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ивницкий, В. А.* Теория сетей массового обслуживания. / В. А. Ивницкий. М. : Изд-во физ.-мат. лит, 2004. 772 с.

2. *Назаров, А. А.* Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания / А. А. Назаров, С. П. Моисеева. Томск : Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.

3. *Назаров, А. А.* Исследование открытой немарковской сети массового обслуживания GI – (GI|∞)^K с высокоинтенсивным рекуррентным входящим потоком / А. А. Назаров, А. Н. Моисеев // Проблемы передачи информации. 2013. Т. 49. Вып. 2, С. 78–91.